

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

11 января 2026 года

Сначала, пожалуйста, прочитайте следующее:

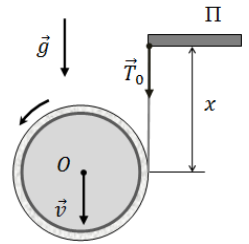
1. Теоретический тур состоит из трех задач. Продолжительность тура 4 часа.
2. Для расчетов Вы можете использовать свой калькулятор.
3. Вам предоставлены чистые листы бумаги и *Листы для записи (Writing sheets)*. Чистые листы бумаги предназначены для черновых записей, их Вы можете использовать по Вашему усмотрению, они не проверяются. На *Writing sheets* следует записывать решения задач, которые будут оценены при проверке работы. В решениях как можно меньше используйте словесные описания. В основном Вы должны использовать уравнения, числа, буквенные обозначения, рисунки и графики.
4. Используйте только лицевую сторону *Writing sheets*. При записи не выходите за пределы отмеченной рамки.
5. Решение каждой задачи следует начинать с новой страницы *Writing sheets*.
6. На каждом использованном *Writing sheets*, в отведенных для этого графах, указана Ваша страна (*Country*), Ваш код (*Student Code*), Вам нужно вписать только текущий номер каждого листа (*Page Number*) и полное количество листов, использованных при решении всех задач (*Total Number of Pages*). Если Вы не хотите, чтобы некоторые использованные *Writing sheets* были включены в ответ, тогда перечеркните их большим крестом на весь лист и не включайте в Ваш подсчёт полного количества листов.

Задача 1 (10.0 балла)

Эта задача состоит из трех частей, не связанных друг с другом.

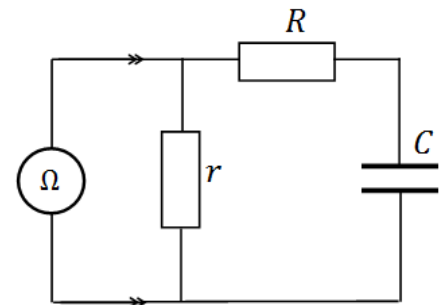
Задача 1.1 (3.0 балла)

На легкую цилиндрическую втулку радиусом R плотно намотана тонким слоем фольга толщиной δ , массой m и длиной $L = 10.0$ м. Один конец фольги закреплён на втулке, а другой – на торце тонкой горизонтальной платформы Π . Вначале рулон (втулка с намотанной фольгой) удерживается так, что его ось O горизонтальна и находится на уровне платформы. Рулон отпускают, и он под действием силы тяжести начинает разматываться. Считая $\delta \ll R \ll L$, найдите длину x_0 разматывшейся части фольги, при которой на платформу будет действовать сила T_0 , равная силе тяжести рулона mg . Определите также ускорение a и скорость v падения центра масс рулона в этот момент времени.

**Задача 1.2 (4.0 балла)**

Показания мультиметра Ω в режиме омметра, подключенного к цепи, с течением времени изменяются по закону $R_\Omega(t) = A - Be^{-t/\tau_0}$, где $A = 100$ кОм, $B = 40$ кОм, $\tau_0 = 100$ с. Определите по этим данным значения сопротивлений r, R и емкость конденсатора C , который в начальный момент не был заряжен. Найдите количество теплоты Q , которое выделяется на сопротивлении R за время измерений $t \gg \tau_0$.

Примечание: мультиметр в режиме омметра измеряет падение напряжения U_x на неизвестном резисторе R_x при пропускании через него фиксированного тока силой $I_0 = 0,1$ мА. На дисплей прибора выводится значение $R_x = U_x/I_0$.

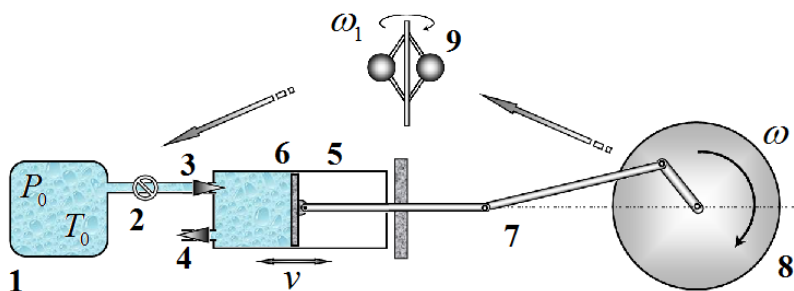
**Задача 1.3 (3.0 балла)**

Наблюдатель (глаз) находится на расстоянии $L = 55$ см от выпукло-вогнутой линзы и рассматривает изображения удаленного уличного фонаря, возникающие за счет отражения от обеих поверхностей линзы (см. фото). Фонарь и глаз расположены вблизи главной оптической оси линзы со стороны вогнутой поверхности. Радиус кривизны вогнутой поверхности равен $r = 7$ см, радиус кривизны выпуклой поверхности составляет $R = 28$ см. При наблюдении видны два изображения фонаря, одно – действительное, другое – мнимое. Отношение видимых угловых размеров этих изображений равно $\gamma = \varphi_1/\varphi_2 = 0.1$, где φ_1 – угловой размер действительного изображения, φ_2 – угловой размер мнимого изображения. Найдите оптическую силу линзы D .



Задача 2. Паровой двигатель (10.0 балла)

В данной задаче необходимо рассмотреть упрощённую теоретическую модель одного из типов парового двигателя. Отметим, что в настоящее время такой двигатель используется только в качестве технической игрушки.



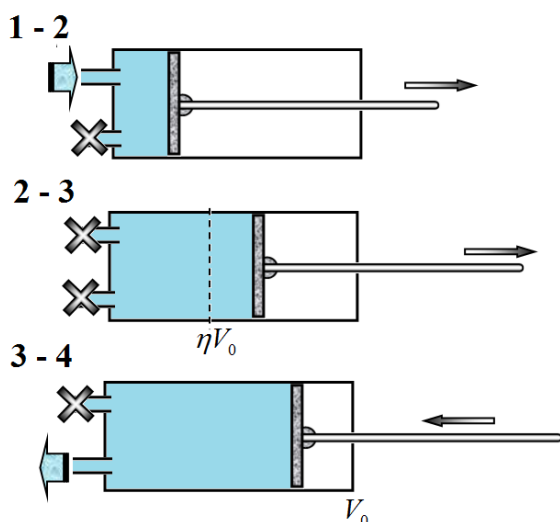
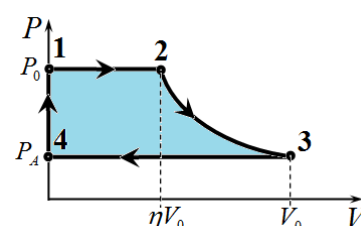
Принципиальная схема рассматриваемого двигателя показана на рисунке выше. Имеется генератор пара **1** (котёл с водой и нагревателем, а также системой дополнительного разогрева пара). Можно считать, что генератор представляет собой большой сосуд, в котором находится водяной пар (без воздуха), давление которого P_0 и температура T_0 поддерживаются постоянными. Нагретый пар по трубе подаётся в рабочий цилиндр **5** с подвижным поршнем **6**. Труба снабжена регулятором подачи пара **2**, управляемым центробежным регулятором Уатта **9**. Рабочий цилиндр имеет два клапана – входной **3** и выходной **4**. Эти клапаны открываются и закрываются при определённых положениях поршня. Подвижный поршень соединён с системой стержней **7**, преобразующих поступательное движение поршня во вращательное движение массивного махового колеса **8**, насаженного на рабочий вал двигателя. С помощью ремённой передачи это колесо соединено с регулятором Уатта, угловая скорость вращения которого ω равна угловой скорости колеса. От частоты вращения регулятора зависит количество пара, проходящего через регулятор подачи пара **2**. Вал махового колеса соединён с рабочим устройством (ради которого и создаются все двигатели).

Во всех частях задачи рассматриваются установившиеся режимы работы, при которых угловые скорости вращения вала и регулятора Уатта остаются постоянными. Разумеется, переход к таким режимам возможен лишь при наличии трения, однако при расчётах установившегося движения его можно не учитывать.

Считайте показатель адиабаты для воды равным $\gamma = 4/3$, молярная масса водяного пара $M = 18.0 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Часть 1. Паровой двигатель без регулятора

Идеальный цикл рассматриваемого двигателя при его бесконечно медленном движении показан на диаграмме P - V . Здесь V – объём части цилиндра между торцом цилиндра и поршнем, занятый паром (далее будем называть его рабочим объёмом); $V_0 = 4.00$ л – максимальный рабочий объём; P – давление пара в этом объёме.



В состоянии **1** поршень касается стенки цилиндра, и рабочий объём равен нулю. Открывается входной клапан, и пар начинает поступать в цилиндр. На участке цикла **1–2** поршень медленно движется вправо; при этом можно считать, что давление пара в цилиндре всё время равно давлению пара в генераторе $P_0 = 10.0 \cdot 10^5$ Па.

В точке **2**, когда рабочий объём достигает значения ηV_0 , входной клапан закрывается, а поршень продолжает движение вправо под действием давления пара. На участке **2–3** процесс расширения является адиабатическим.

В точке **3** поршень достигает крайнего положения, рабочий объём максимален, а давление падает до атмосферного значения $P_A = 1.00 \cdot 10^5$ Па. После этого открывается выходной клапан, и поршень выталкивает пар в атмосферу.

Когда поршень возвращается в крайнее левое положение, выходной клапан закрывается, и снова открывается входной клапан (участок 4–1).

2.1 Определите значение коэффициента η .

Чтобы исключить конденсацию пара необходимо, чтобы его минимальная температура была выше температуры конденсации при атмосферном давлении $t_s = 100^\circ\text{C}$.

2.2 Определите необходимое значение температуры пара T_0 (в градусах Цельсия), чтобы в процессе расширения его температура не опускалась ниже температуры конденсации t_s .

Далее считайте, что в рассматриваемой модели параметры T_0 и η равны найденным значениям.

2.3 Рассчитайте массу пара m_0 , поступающего в цилиндр за один цикл.

2.4 Рассчитайте работу A_0 , которую совершает двигатель за один цикл.

Далее рассмотрим работу двигателя в реальном режиме с учетом движения поршня с некоторой скоростью. Будем считать, что маховое колесо вращается с постоянной угловой скоростью ω . Строго говоря, в этом случае движение поршня не является равномерным. Однако, приближенно можно считать, что скорость движения поршня в одном направлении постоянна и равна его средней скорости. В данной задаче удобно рассматривать скорость изменения рабочего объема $v = dV/dt$.

2.5 Выразите среднюю скорость изменения рабочего объема цилиндра v через максимальный рабочий объем V_0 и угловую скорость вращения махового колеса ω .

При движении поршня давление пара в цилиндре P на этапе цикла 1-2 будет отличаться от давления пара в генераторе P_0 . Пусть скорость поступления пара пропорциональна разности давлений на регуляторе давления 2, т.е.

$$\frac{dm}{dt} = K(P_0 - P),$$

где K – постоянный коэффициент, задаваемый регулятором 2. В данной части считайте его постоянным и равным $K = K_0 = 4.20 \cdot 10^{-7} \text{ кг}/(\text{Па} \cdot \text{с})$.

Можно считать, что процесс расширения пара на всех этапах цикла является адиабатическим.

2.6 Получите дифференциальное уравнение, описывающее изменение массы газа в цилиндре при открытом входном клапане. В это уравнение помимо искомой функции $m(t)$ должны входить только известные величины.

2.7 Покажите, что при постоянной скорости движения поршня давление пара P в цилиндре остается постоянным.

2.8 Получите алгебраическое уравнение для определения давления пара P в цилиндре на этапе цикла 1-2.

Чтобы приближенно решить полученное уравнение (т.е. найти давление P) сделайте следующее математическое приближение: считайте (только в данном пункте задачи), что показатель адиабаты водяного пара $\gamma \approx 1$. Кроме того, при расчете работы, совершенной паром, пренебрегайте атмосферным давлением.

2.9 Используя указанное приближение, выразите давление пара в цилиндре P на этапе цикла 1-2 через давление P_0 и другие известные параметры задачи.

2.10 Рассчитайте численные значения давления P при угловой скорости вращения вала $\omega = 10.0 \text{ с}^{-1}$.

2.11 Покажите, что формула для расчета работы A , совершаемой двигателем за один цикл при вращении махового колеса с постоянной угловой скоростью ω , может быть представлена в виде

$$A = \frac{A_0}{1 + \beta \frac{\omega}{K}}. \text{ Рассчитайте численные значения параметров } A_0 \text{ и } \beta \text{ в этой формуле.}$$

Пусть вал двигателя помимо момента силы M со стороны поршня, действует постоянный момент силы M_0 со стороны рабочего устройства.

2.12 Выразите среднюю установившуюся скорость вращения колеса ω через момент силы M_0 , коэффициент K и параметры A_0 и β .

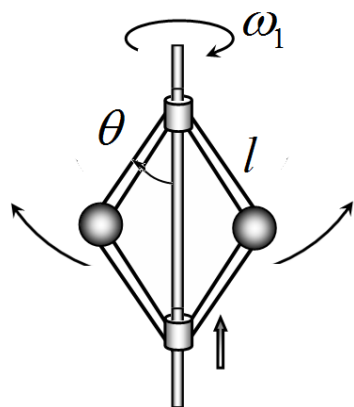
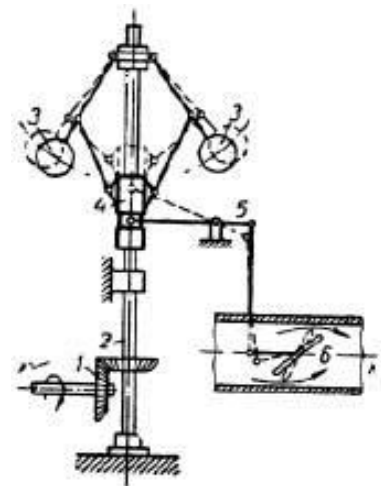
2.13 Рассчитайте максимальный момент силы M_0 , при котором двигатель может работать.

2.14 Постройте схематический график зависимости угловой скорости вращения от момента силы M_0 .

Часть 2. Регулятор без двигателя

Угловая скорость вращения колеса двигателя зависит от момента сил, который передается на рабочее устройство. При уменьшении этого момента силы угловая скорость может резко возрастать, что может привести к аварии и разрушению двигателя. Чтобы избежать такой ситуации используются различные системы автоматической регулировки, одной из которых является центробежный регулятор Уатта.

Принцип его действия достаточно прост. Вращение вала двигателя передаётся через передачу на вал регулятора. Во время вращения вала регулятора под действием центробежной силы грузики отклоняются от оси, причём чем быстрее вращается вал, тем дальше расходятся грузики. При этом рычаги взаимодействуют с муфтой и перемещают её по оси вала. Через систему рычагов смещение муфты передается на заслонку регулятора подачи пара таким образом, чтобы при повышении скорости вращения вала подача уменьшалась, а при уменьшении – увеличивалась.



Для решения данной задачи технические детали конкретного устройства не существенны. Рассмотрим принципиальную схему работы регулятора. Шарнирная ромбическая рамка закреплена на вертикальном валу, вращающемся с постоянной угловой скоростью ω . Верхний угол рамки закреплён, нижний может свободно скользить по валу. В боковых углах рамки закреплены два массивных шарика. Можно считать, что при отсутствии вращения вала $\theta = 0$. При вращении вала шарики приподнимаются, отклоняясь на некоторый угол θ от вертикали. Это приводит к тому, что подача пара в рабочий цилиндр уменьшается. Будем считать, что коэффициент K , описывающий скорость подачи пара, связан с углом отклонения простой зависимостью

$$K = K_0 \cos \theta,$$

где K_0 – заданный ранее коэффициент.

Длина стороны рамки равна $l = 20$ см.

2.15 Найдите зависимость угла отклонения шариков от вертикали θ от постоянной угловой скорости вращения ω регулятора.

2.16 Постройте схематический график зависимости коэффициента K от угловой скорости вращения регулятора ω .

Часть 3. Двигатель с регулятором

2.17 Найдите зависимость установившейся скорости вращения вала двигателя от момента силы M_0 с описанной системой регулирования.

2.18 Постройте схематический график полученной зависимости.

Задача 3. Электронный парамагнитный резонанс (10.0 баллов)

Магнитный момент

Магнитный момент \mathbf{m} плоского контура с током — это векторная величина, определяемая как произведение силы тока I , площади контура S и единичного вектора нормали \mathbf{n} , перпендикулярного плоскости контура:

$$\mathbf{m} = IS\mathbf{n}.$$

Направление вектора магнитного момента устанавливается по правилу буравчика: если вращать ручку буравчика в направлении тока в контуре, то поступательное движение буравчика покажет направление \mathbf{m} .

3.1 По круговому витку радиуса R протекает электрический ток, при этом виток обладает магнитным моментом \mathbf{m} . Найдите индукцию магнитного поля \mathbf{B}_0 в центре витка.

3.2 Тот же виток помещается во внешнее однородное магнитное поле с индукцией \mathbf{B} так, что вектор магнитного момента составляет угол φ с направлением \mathbf{B} . Найдите модуль механического момента сил \mathbf{M} , действующего на виток со стороны внешнего магнитного поля.

3.3 Виток медленно поворачивается во внешнем однородном магнитном поле \mathbf{B} так, что направление его магнитного момента \mathbf{m} изменяется от положения, когда \mathbf{m} направлен по полю ($\mathbf{m} \uparrow \uparrow \mathbf{B}$), до положения, когда \mathbf{m} направлен против поля ($\mathbf{m} \uparrow \downarrow \mathbf{B}$). Найдите механическую работу A сил со стороны магнитного поля при таком повороте.

Электронный парамагнитный резонанс

Если заряженная частица вращается или движется по замкнутой траектории, то у неё имеется механический момент, а вместе с ним возникает и магнитный момент. При этом выполняется универсальное гиромагнитное отношение, которое показывает, как связаны между собой магнитный и механический момент частицы.

Пусть электрон в атоме движется по круговой орбите так, что его орбитальный момент импульса относительно центра равен \mathbf{L} . Такое движение можно рассматривать как эквивалент кругового электрического тока, который обладает магнитным моментом \mathbf{m} . Между магнитным моментом и моментом импульса выполняется гиромагнитное соотношение

$$\mathbf{m} = -g_L \frac{e}{2m_e} \mathbf{L},$$

где e — элементарный заряд, m_e — масса электрона, а g_L — так называемый множитель Ландэ.

3.4 Найдите множитель Ландэ g_L для кругового орбитального движения электрона.

Электронный парамагнитный резонанс (ЭПР) — это явление, при котором вещество с неспаренными электронами поглощает электромагнитное излучение (обычно СВЧ-диапазона), если оно находится в постоянном магнитном поле. Такое поглощение происходит не всегда, а только при строго определенной частоте, поэтому его называют резонансным.

Представим, что атом содержит во внешней оболочке один неспаренный электрон с нулевым орбитальным моментом. У такого электрона есть собственный момент вращения — спин. Когда образец с веществом помещается в постоянное магнитное поле соленоида с индукцией B , то относительно него спин может ориентироваться двумя способами: вдоль направления магнитного поля с проекцией момента импульса $+\hbar/2$, или против него с проекцией $-\hbar/2$. Эти два положения обладают разной энергией, поэтому между ними возможен переход. В дальнейшем считайте, что множитель Ландэ для спина g_s в два раза больше, чем для орбитального движения электрона. Образец облучают электромагнитной волной с фиксированной круговой частотой ω , которая может заставить электрон переходить между двумя состояниями с разными проекциями спина, а затем медленно меняют величину индукции внешнего магнитного поля, фиксируя изменение интенсивности поглощения электромагнитных волн.

3.5 Найдите частоту внешнего электромагнитного излучения ω и рассчитайте ее численное значение, если максимум поглощения пришелся на индукцию магнитного поля $B_0 = 350$ мТл.

Теперь атомы того же типа внедрены в неизвестное вещество, из которого изготовлен сердечник для соленоида.

3.6 Указанное в предыдущем пункте магнитное поле достигалось при силе тока в обмотке соленоида $I_0 = 1.50$ А. Определите новое значение силы тока I в обмотке соленоида для резонансного поглощения, если магнитная проницаемость неизвестного вещества равна $\mu = 1.25$.

Термодинамическое равновесие

Пусть сердечник, помещенный в тоже самое магнитное поле, находится в состоянии термодинамического равновесия при температуре $T = 50$ К, а полное число внедренных атомов составляет $N = 1.00 \cdot 10^{20}$. Обозначим через n_0 разность между количеством атомов, находящихся на нижнем N_1 и верхнем N_2 энергетических уровнях.

3.7 Рассчитайте n_0 при заданных условиях.

При взаимодействии электромагнитного поля с веществом происходят три процесса:

- 1) Поглощение – атом с более низкого энергетического уровня E_1 переходит на более высокий уровень E_2 с поглощением фотона, при этом количество переходов с нижнего уровня в единицу времени определяется выражением:

$$\frac{dN_1}{dt} = -B_{12}\rho N_1,$$

где ρ – плотность электромагнитного излучения;

- 2) Вынужденное излучение – под действием внешнего фотона атом с более высокого энергетического уровня E_2 переходит на более низкий уровень E_1 с излучением другого фотона, при этом количество переходов с верхнего уровня в единицу времени определяется выражением:

$$\frac{dN_2}{dt} = -B_{21}\rho N_2;$$

- 3) Спонтанный переход – самопроизвольный переход атома с верхнего на нижний уровень с испусканием фотона, при этом количество переходов с верхнего уровня в единицу времени определяется выражением:

$$\frac{dN_2}{dt} = -A_{21}N_2.$$

Константы B_{12}, B_{21}, A_{21} называются коэффициентами Эйнштейна. Планк показал, что в состоянии термодинамического равновесия плотность энергии равновесного электромагнитного излучения описывается формулой:

$$\rho = \frac{2\hbar\omega^3}{\pi c^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1}.$$

3.8 Докажите, что $B_{12} = B_{21}$.

Наличие внешнего источника микроволнового поля

В начальный момент времени система находится в термодинамическом равновесии при указанной выше температуре. Затем включается источник микроволнового излучения таким образом, чтобы плотность электромагнитного излучения ρ в образце оставалась постоянной во времени, а ее величина такова, что спонтанными переходами в системе можно пренебречь.

3.9 Найдите аналитическую зависимость разности $n(t)$ между количеством атомов, находящихся на нижнем и верхнем энергетических уровнях, в зависимости от времени t , считая, что $k = B_{12}\rho$.

3.10 Известно, что разность между количеством атомов, находящихся на нижнем и верхнем энергетических уровнях, через время $\tau = 1.00$ с после включения источника изменилась ровно в 2 раза. Рассчитайте при данных условиях мощность микроволнового источника излучения в начальный момент времени.

В действительности поглощение и вынужденное излучение не являются единственными процессами, в результате которых электрон, находящийся на верхнем уровне, теряет свою избыточную энергию. Большую роль играют процессы релаксации, в результате которых избыток энергии передается окружающему веществу, ведь именно благодаря им осуществляется равновесное распределение по энергетическим уровням.

Процесс релаксации для уровня 1 выглядит как непрерывные переходы с уровня 1 на уровень 2 и обратно, тоже самое справедливо для уровня 2. При этом члены, описывающие релаксацию для уровня 1, записываются через константы α_1 и α_2 следующим образом

$$\frac{dN_1}{dt} = -\alpha_1 N_1 + \alpha_2 N_2,$$

а, следовательно, аналогичное соотношение можно записать и для уровня 2.

3.11 Пусть для данного вещества $\alpha_1 + \alpha_2 = 0.670 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$. Рассчитайте при данных условиях мощность микроволнового источника излучения в установившемся режиме измерения спектра методом электронного парамагнитного резонанса.

Математическая подсказка для задач теоретического тура

Вам может понадобиться знание следующих формул:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \text{ где } n \neq -1 - \text{константа, } C - \text{произвольная постоянная;}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \text{ где } C - \text{произвольная постоянная;}$$

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}} + C, \text{ где } a - \text{константа, } C - \text{произвольная постоянная;}$$

$$(1+x)^\gamma \approx 1 + \gamma x + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2} x^2, \text{ для } |x| \ll 1 \text{ и любых } \gamma;$$

$$\tan x \approx \sin x \approx x, \text{ для } |x| \ll 1;$$

$$\ln(1+x) \approx x, \text{ для } |x| \ll 1.$$

Список физических констант

$$\text{Ускорение свободного падения } g = 9.80 \text{ м/с}^2;$$

$$\text{Универсальная газовая постоянная } R = 8.31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)};$$

$$\text{Скорость света в вакууме } c = 3.00 \cdot 10^8 \text{ м/с};$$

$$\text{Приведенная постоянная Планка } \hbar = 1.05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с};$$

$$\text{Постоянная Больцмана } k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К};$$

$$\text{Магнитная постоянная } \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м};$$

$$\text{Электрическая постоянная } \varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м};$$

$$\text{Постоянная Стефана-Больцмана } \sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К}^4);$$

$$\text{Элементарный заряд } e = 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ Кл};$$

$$\text{Масса электрона } m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}.$$